

SISTEMA DINÁMICO DE CRECIMIENTO DIAMÉTRICO PARA CINCO ESPECIES DE PINOS EN DURANGO, MÉXICO¹

[DYNAMIC DIAMETRIC GROWTH SYSTEM FOR FIVE PINE SPECIES IN DURANGO, MEXICO]

Marcos de Almeida Souza¹, Miguel Ricardo Hernández Velazco¹, João Marcelo Brazão Protázio², Jonathan Gabriel Escobar Flores³, Carlos Antonio López Sanchez⁴, José Ciro Hernández Díaz⁵, Christian Wehenkel^{5§}

¹Alumno de la Maestría Institucional en Ciencias Agropecuarias y Forestales, Universidad Juárez de Estado de Durango (UJED), Durango, México. ²Profesor-investigador, Universidade Federal do Pará, Faculdade de Estatística, Belém, Pará, Brasil. ³Profesor-investigador del Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Durango, Instituto Politécnico Nacional, Durango, Durango, México. ⁴GIS- Forest Group, Departamento de Biología de Organismos y Sistemas, Universidad de Oviedo, Mieres, España. ⁵Profesor-investigador, (UJED), Instituto de Silvicultura e Industria de la Madera, Durango, México. [§]Autor para correspondencia: (wehenkel@ujed.mx).

RESUMEN

Los modelos de crecimiento son herramientas que permiten representar la producción de madera en un período de tiempo dado, para obtener pronósticos precisos y determinar la productividad, en función de tratamientos silvícolas, variables climáticas, características del suelo, etc. Durango cuenta con una de las principales reservas forestales arboladas de México, principalmente de especies de pinos. Sin embargo, en las zonas de aprovechamiento el crecimiento es variable entre rodales, por lo cual es importante implementar modelos dinámicos, como por ejemplo a través de la metodología de diferencias algebraicas generalizadas (GADA), para obtener estimaciones precisas del crecimiento. El objetivo en este estudio fue desarrollar la aplicación, no reportada en la literatura, de un caso particular del método GADA con dos parámetros a partir del modelo de Weibull, útil para estimar el crecimiento diamétrico en función del tiempo. El estudio se realizó en seis parcelas de 0.25 ha en los bosques mixtos e irregulares de Durango, con un total de 198 individuos distribuidos entre cinco especies de *Pinus*. El modelo desarrollado se adaptó y estimó con precisión a los datos en estudio, con parámetros significativos al 1%, además de mostrar un RMSE y R² aceptables, con estimaciones cercanas de 3.3 cm y 83% en promedio, respectivamente; y produjo curvas polimórficas con buen ajuste a los datos, estimando índices de sitio confiables. De esta manera, se concluyó que el modelo desarrollado es válido, apto y que muestra resultados satisfactorios para este tipo de estimación.

Palabras clave: Desarrollo de ecuaciones, modelos flexibles, manejo forestal, sostenible.

ABSTRACT

Growth models are tools that allow, for example, represent wood production in a certain period of time, to obtain precise forecasts to determine productivity, depending on the silvicultural treatments, climatic variables, soil characteristics, etc. Durango has one of the main forest

¹ Recibido: 26-abril-2019

Aceptado: 30-noviembre-2019

reserves in Mexico, mainly of pine species. However, in logging areas, growth is variable among stands, so it is important to implement dynamic models, such as through the Generalized Algebraic Difference Approach (GADA) methodology, to obtain accurate growth estimates. The objective of this study was to develop one application, not found in the literature, of a particular case of the GADA method with two parameters, from the Weibull model, useful to estimate the growth of the diameter as a function of time. The study was carried out in six plots of 0.25 ha in the mixed and irregular forests of Durango, with a total of 198 individuals distributed in five species of *Pinus*. The model developed was adapted and it estimated with precision the data under study, with parameters significant at 1%, in addition to acceptable RMSE and R^2 , whose estimates were close to 3.3 cm and 83% on average, respectively; and yielded polymorphic curves well-adjusted to the data, obtaining reliable site indexes. Thus, it was concluded that the model developed is valid, adequate and that it shows satisfactory results for this type of estimation.

Index words: Equation development, flexible models, forest management, sustainable.

INTRODUCCIÓN

Los modelos de crecimiento son abstracciones matemáticas de la dinámica natural de las estructuras forestales, que permiten estimar, entre otros parámetros, el crecimiento y la mortalidad, tanto en composición como en estructura (Vanclay, 1994). Así, en términos numéricos, se puede estimar cuánto puede crecer y producir un rodal en un período de tiempo determinado (Santiago-García *et al.*, 2017). Por lo tanto, estas predicciones precisas de los niveles de crecimiento de diámetro, altura y otras características dendrométricas de los árboles, son necesarias para el manejo forestal sustentable (Hall y Bailey, 2001, siendo utilizadas para la evaluación de tratamientos silvícolas y la planificación general del manejo (García, 1994).

Las proyecciones de crecimiento se realizan a través del método estadístico de regresión no lineal, donde se aplican modelos formados por parámetros que representan las características de la población estudiada, e.g. el crecimiento máximo y la tasa de crecimiento, donde cada parámetro se estima a partir de una muestra de la población en estudio. Las condiciones ambientales, como la calidad del sitio y la competencia debida a la densidad de los árboles, tienen un efecto sobre el crecimiento en diámetro y volumen y, sobre el tiempo requerido para alcanzar una determinada producción (Del Río *et al.*, 2016). Por lo tanto, es importante implementar modelos dinámicos flexibles que permitan modelar dichas variables para obtener respuestas relevantes con tasas de error reducidas, a fin de obtener mejores y más realistas estimaciones de las relaciones paramétricas de interés.

En este sentido, Bailey y Clutter (1974) desarrollaron la aplicación de las Diferencias Algebraicas (ADA), donde uno de los parámetros del modelo se caracteriza como variable dependiente. Cieszewski y Bailey (2000) desarrollaron una generalización (GADA), a partir de un modelo base también permite generar curvas de sitio más flexibles y dinámicas, en donde dos o más parámetros se consideran dependientes.

Estas metodologías se aplican en estudios forestales en varios países. Nunes *et al.* (2011) utilizaron la metodología GADA para modelar el crecimiento de la altura dominante de pino marítimo (*Pinus pinaster* Ait.), con parámetros que dependen de las variables de suelo y clima,

mientras que Duan *et al.* (2018) trabajaron con los modelos Chapman-Richards y Weibull, entre otros, para estimar la productividad local en rodales naturales irregulares en el noreste de China. Para un sistema dinámico de crecimiento y producción de madera, Santiago-García *et al.* (2015) aplicaron a *Pinus patula* Schl. et Cham. el modelo GADA con un enfoque a nivel de plantación, en bosques de la misma edad en Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México.

En México, las mayores reservas forestales de asociaciones de pino y pino-encino se encuentran en el estado de Durango (CONAFOR, 2012). Las aplicaciones de los modelos de crecimiento de estas asociaciones forestales usan principalmente ecuaciones GADA con tres o más parámetros, la mayoría de los cuales se basan en el modelo Chapman-Richards de tres parámetros. En este sentido, se necesitan alternativas para esta metodología, sobre todo de otros modelos que contengan en su versión final dos parámetros, y tengan aplicabilidad más directa, menos costosa y produzcan resultados satisfactorios, sobre el comportamiento y potencial productivo de las especies de pino.

En el presente estudio se buscó responder a la pregunta: ¿Es posible desarrollar otro modelo GADA a partir del modelo Weibull, que contenga menos parámetros y que tenga buen ajuste para estimar el crecimiento diamétrico? En ese sentido, el objetivo en este estudio fue evaluar y comparar el ajuste del modelo de crecimiento de Chapman-Richards con el de Weibull, cuya forma de la ecuación se describe en Panik (2014). También se buscó evaluar si este segundo modelo tiene un ajuste similar al primero (que es el más utilizado en este tipo de aplicaciones), y posteriormente desarrollar un nuevo modelo GADA, con dos parámetros, a partir de la ecuación de Weibull, y demostrar que es adecuado para hacer predicciones de interés. Los resultados de este trabajo tienen una amplia aplicabilidad, ya que no existen modelos GADA que permitan proyectar la evolución de los parámetros de interés en el tiempo, con buenos ajustes, utilizando sólo dos parámetros en modelos de crecimiento para especies de pinos.

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de estudio

El estudio se realizó entre septiembre y noviembre de 2017, en un gradiente longitudinal entre los 2,021 y los 2,704 m, en un transecto con dirección suroeste-noreste, en los bosques mixtos e irregulares de la Sierra Madre Occidental de Durango. Se establecieron seis parcelas de 50 x 50 m (0.25 ha), equidistantes cada 17,000 m en el transecto, ubicados en las coordenadas siguientes: punto 1, 23°55'50,55''N 104°55'50,51''W; punto 2, 23°53'21,27''N 105°05'30,01''W; punto 3, 23°51'03,14''N 105°15'11,70''W; punto 4, 23°46'21,43''N 105°23'49,05''W; punto 5, 23°42'26,06''N 105°32'46,19''W; y punto 6, 23°37'07,21''N 105°40'55,33''W (Figura 1).

A los árboles de cada parcela se les identificó por especie y se le midió el diámetro a la altura del pecho (DAP). Con un taladro de Pressler se extrajo una viruta a la altura de 1.30 m desde el nivel del suelo, donde se contaron los anillos de crecimiento para estimar la edad y el incremento en diámetro (Figura 1). Aquellas especies cuyo número total de individuos entre todas las parcelas fue menor que 10, no fueron considerados en el modelado.

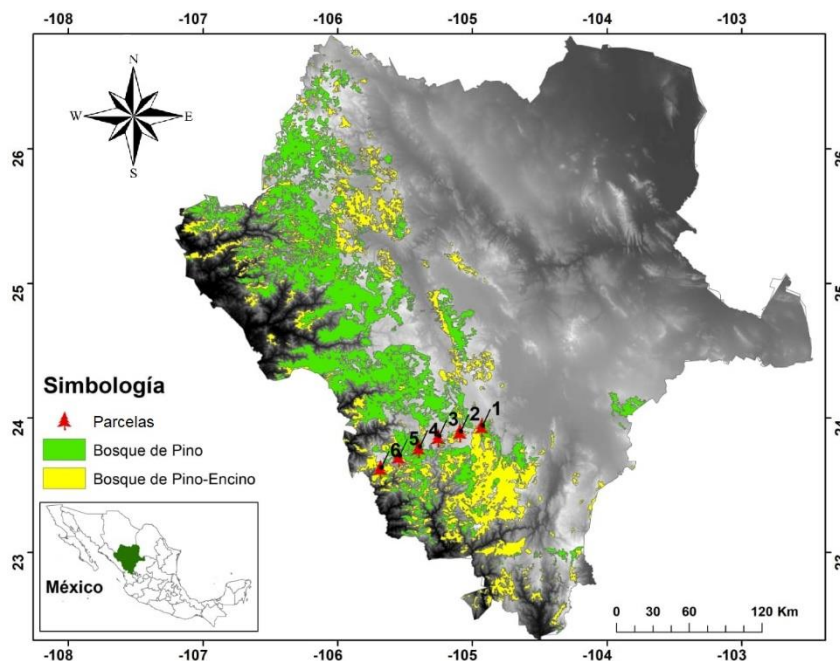


Figura 1. Localización de las seis parcelas en la Sierra Madre Occidental de Durango, México.

Modelos de crecimiento

Se adoptaron los modelos de Chapman-Richards (ecuación 1) y Weibull (ecuación 2) para verificar y comparar sus ajustes, para posteriormente desarrollar la nueva ecuación dinámica, basado en este último modelo.

$$d(t) = \theta_1(1 - e^{-\theta_2 t})^{\theta_3} \quad \text{Ec. (1)}$$

$$d(t) = \theta_1 - \theta_2 e^{-\theta_3 t} \quad \text{Ec. (2)}$$

donde θ_1 , θ_2 y θ_3 son los respectivos parámetros de los modelos; d representa el DAP y t denota la edad de los pinos (años).

Aplicación de las diferencias algebraicas generalizadas (GADA)

El concepto conocido como ADA, trabaja con un parámetro del modelo base escogido a priori como variable dependiente. Por otro lado, el método GADA aparece cuando se asume que dos o más parámetros del modelo base son simultáneamente específicos del sitio de estudio. Los modelos derivados de GADA son invariables en términos de edad y trayectoria, es decir, en este caso el diámetro en cualquier edad se puede inferir a partir del diámetro de cualquier otra edad; por lo tanto, dan como resultado familias de curvas polimórficas con asíntotas múltiples, y son ampliamente utilizados para desarrollar modelos dominantes de altura, diámetro y área basal en poblaciones de bosques (Cieszewski, 2001; Bravo-Oviedo *et al.*, 2011).

Los modelos dinámicos GADA requieren una definición explícita de cómo las características específicas de la población varían entre diferentes sitios y pueden reemplazarse con funciones explícitas de una sola variable independiente no observable (χ), que describe la productividad

del sitio como un resumen de los regímenes de manejo y factores ecológicos de cada sitio (Cieszewski y Bailey, 2000).

Así, a partir de la selección del modelo base bidimensional, $d = f(t)$, se expande a una ecuación tridimensional explícita del sitio, $d = f(t, \chi)$. Dado que χ es una variable no observable, se puede por ejemplo definir t_0, d_0 como las condiciones iniciales y a partir de ellos estimar nuevos parámetros a través del tiempo; de esta manera el modelo dinámico se define implícitamente como $d = f(t, t_0, d_0, \theta_1 \dots \theta_n, a_1 \dots a_n)$, en que t, t_0, d_0 son respectivamente el tiempo, tiempo base y diámetro base, $\theta_1 \dots \theta_n$ son los parámetros iniciales del modelo, y $a_1 \dots a_n$ son los nuevos parámetros del modelo dinámico.

De esta manera, a partir del modelo de Weibull (ecuación 2), y considerando los parámetros θ_1 y θ_2 como específicos ($\theta_1 = a_1 \chi$ y $\theta_2 = \chi$) sujetos a las condiciones iniciales t_0, d_0 , se tiene la ecuación base:

$$d_0 = a_1 \chi - \chi e^{-\theta_3 t_0}$$

y aislando χ en esta ecuación, se tiene:

$$\chi = \frac{d_0 e^{\theta_3 t_0}}{a_1 e^{\theta_3 t_0} - 1},$$

y reemplazando este resultado en la ecuación base y haciendo su desarrollo, resulta:

$$d(t) = \frac{a_1 d_0 e^{\theta_3 t_0}}{a_1 e^{\theta_3 t_0} - 1} - \frac{d_0 e^{\theta_3 t_0 - \theta_3 t}}{a_1 e^{\theta_3 t_0} - 1} \quad \text{Ec. (3)}$$

donde, para este caso de la aplicación GADA se tiene que: θ_3 = el parámetro inicial del modelo; d = el diámetro a estimar; d_0 y t_0 = diámetro base y tiempo base asumidos para modelos dinámicos; y a_1 = el nuevo parámetro estimado a partir del desarrollo de la ecuación dinámica.

Evaluación de los modelos

Para analizar el ajuste del modelo desarrollado, se utilizó el MAPE (ecuación 4), que tiene una interpretación intuitiva y se usa en la aplicación de predicciones, por ejemplo Myttenaere *et al.* (2016) estudiaron las consecuencias de utilizar la MAPE como medida de calidad para los modelos de regresión, donde cuantifican el error asociado a cada uno de los modelos implementados en el presente experimento; el criterio de información Akaike (AIC) (ecuación 5) desarrollado por Akaike (1974), que estima la discrepancia calculada en las proyecciones de datos (Cavanaugh, 1997); el coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}) (ecuación 6), que estima en qué medida el modelo puede explicar los valores observados; y la raíz del error cuadrático medio (RMSE) (ecuación 7), que calcula la diferencia entre el valor real del punto de datos (valores observados) y el valor del punto de datos en la curva de mejor ajuste (valores estimados).

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \quad \text{Ec. (4)}$$

$$AIC = 2P - 2\ln(L) \quad \text{Ec. (5)}$$

$$R^2_{adj} = 1 - \left(\frac{n-1}{n-p} \times \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2} \right) \quad \text{Ec. (6)}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}} \quad \text{Ec. (7)}$$

Donde: *MAPE*, *AIC*, *R² adj* y *RMSE* corresponden al Error porcentual medio absoluto, Criterio de Información de Akaike, Coeficiente de Determinación Ajustado y a la Raíz de Error Cuadrada Media, respectivamente; *n* es el número de observaciones; *p* es el número de parámetros del modelo; *y_i* son valores observados de las variables; *ȳ_i* son los promedios de los valores observados de las variables, respectivamente; y *ŷ_i* los valores estimados. Cuando más bajos sean los valores de *MAPE*, *RMSE* y *AIC*, y cuanto más alto sea el valor de *R²adj*, mejor será el modelo.

El modelado de las ecuaciones dinámicas, así como la evaluación de los modelos se hicieron a través del software R (versión 3.5.3) (R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria), con los paquetes *stats*, *minpack.lm* y *Metrics*.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se identificaron seis especies: *Pinus arizonica* Engelman, *P. engelmannii* Carrier, *P. leiophylla* Schiede ex Schl. et Cham., *P. strobiformis* Engelman, *P. teocote* Schl. y *P. lumholtzii* Rob. et Fern. Se observó que las especies más abundantes también son aquellas con mayor edad, e.g. *P. engelmannii* (N = 106; Edad = 86) y *P. strobiformis* (N = 50; Edad = 69). Los individuos que presentaron mayores DAP fueron *P. engelmannii* (DAP = 44.84) y *P. leiophylla* (DAP = 37.82). La edad media aproximada de las parcelas es de 37 años, variando entre 9 y 86 años, con un diámetro promedio aproximado de 20 cm, oscilando entre 2.79 y 44.34 cm. Otro factor importante a observar es la discrepancia entre los diámetros de las especies *P. engelmannii* y *P. leiophylla*, que tienen una desviación estándar muy alta en relación con las otras (9.03 y 11.81, respectivamente) (Cuadro 1).

Cada parcela posee distinta composición y frecuencia de especies. La parcela 3 presentó menor frecuencia de especies y número de individuos, pero la parcela 5 presentó mayor composición y frecuencia (Figura 2). Se observa que la especie *P. engelmannii* ocurre en todas las parcelas, pero *P. teocote* y *P. lumholtzii* aparecieron solo en las parcelas 1 y 6, respectivamente.

Cuadro 1. Valores básicos observados de los pinos medidos en el periodo de septiembre a noviembre de 2017.

Est	<i>Pa</i>		<i>Pe</i>		<i>Pl</i>		<i>Ps</i>		<i>Pt</i>	
	Ed	DAP	Ed	DAP	Ed	DAP	Ed	DAP	Ed	DAP
Min	26	12.89	9	2.79	26	8.39	15	5.58	20	10.79
Med	43.75	22.20	38.33	16.77	35.00	21.41	32.56	13.72	39.73	22.79
Max	52	37.38	86	44.34	48	37.82	69	30.09	59	35.25
SD	7.43	6.61	16.21	9.03	7.11	11.81	10.82	5.14	11.79	6.80
N	16		106		11		50		15	

Est = Estadísticas; Min = Mínimo; Med = Media; Max = Máximo; SD = Desviación estándar (SD); N = número de individuos; Ed = edad (años); DAP = diámetro a la altura del pecho (cm); *Pa* = *Pinus arizonica*, *Pe* = *Pinus engelmannii*, *Pl* = *Pinus leiophylla*, *Ps* = *Pinus strobiformis*, *Pt* = *Pinus teocote*.

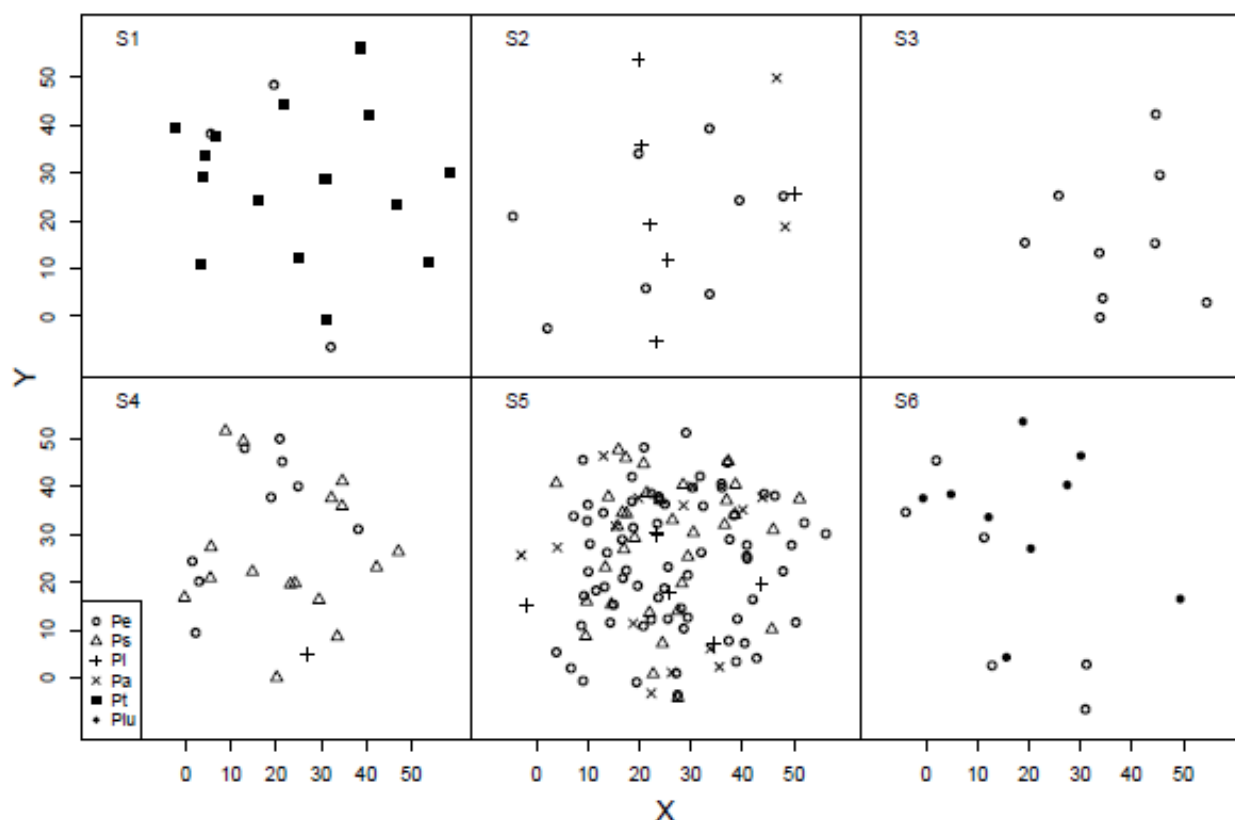


Figura 2. Distribución de los pinos en las parcelas de estudio. X = Límite oeste-este (m); Y = Límite sur-norte (m); S1, S2, S3, S4, S5, S6 = Parcelas 1 a 6, respectivamente; *Pe* = *Pinus engelmannii*, *Ps* = *Pinus strobiformis*, *Pl* = *Pinus leiophylla*, *Pa* = *Pinus arizonica*, *Pt* = *Pinus teocote*, *Plu* = *Pinus lumholtzii*.

Se observó que las estimaciones del DAP de las ecuaciones básicas 1 y 2 son similares en las estadísticas de ajuste MAPE, AIC, R^2 adj y RMSE (Cuadro 2), Por lo anterior, se utilizó el modelo Weibull para desarrollar un nuevo modelo GADA con 2 parámetros. El modelado de la ecuación dinámica de GADA desarrollada a través de la ecuación 2 (Cuadro2, ecuación 3) tiene ligera ventaja en las estadísticas de ajuste sobre los modelos base, con más énfasis en los ajustes

del RMSE y R^2 adj, con promedios cercanos a 3.3 cm y 83%, respectivamente. Además de desarrollar y probar una nueva ecuación, este modelo también contiene menos parámetros en relación con los modelos base, lo cual es una ventaja por su aplicación más directa y simplificada, pues cada parámetro es una característica de la población en estudio y al requerir menos parámetros para la estimación, se necesita medir menos características lo cual significa menores costos de muestreo.

Cuadro 2. Ajustes de los modelos de Chapman-Richards (Ecuación 1), Weibull (Ecuación 2) y modelo dinámico GADA (Ecuación 3) desarrollado a través del modelo de Weibull.

Ec.	Est.	Especies de <i>Pinus</i>				
		<i>Pa</i>	<i>Pe</i>	<i>Pl</i>	<i>Ps</i>	<i>Pt</i>
1	θ_1	29.41***	21.87***	33.63***	32.80***	41.89***
	θ_2	0.03***	0.04***	0.04**	0.02***	0.02***
	θ_3	1.06***	1.40***	1.58***	1.21***	1.11***
	MAPE	0.24	0.38	0.40	0.26	0.21
	AIC	3878	24778	2434	7272	3044
	R^2_{adj}	0.82	0.76	0.77	0.82	0.86
	RMSE	3.84	5.10	5.66	2.25	3.09
2	θ_1	29.30***	23.98***	17.83***	42.98***	44.61***
	θ_2	29.89***	25.16***	25.17***	43.57***	45.34***
	θ_3	0.03***	0.03***	0.10***	0.01***	0.02***
	MAPE	0.24	0.40	0.53	0.27	0.21
	AIC	3877	24789	2526	7275	3043
	R^2_{adj}	0.81	0.76	0.76	0.83	0.89
	RMSE	3.84	5.11	6.37	2.26	3.09
3	θ_3	0.01***	0.01***	0.02***	-0.01***	0.03***
	a_1	1.01***	0.97***	0.95***	1.01***	0.95***
	MAPE	0.24	0.36	0.39	0.24	0.19
	AIC	3798	24166	2429	7202	3020
	R^2_{adj}	0.84	0.80	0.77	0.85	0.88
	RMSE	3.63	5.03	5.57	2.35	3.19

Ec. = Número de la ecuación; Est. = Estadísticas; *Pa* = *Pinus arizonica*, *Pe* = *Pinus engelmannii*, *Pl* = *Pinus leiophylla*, *Ps* = *Pinus strobiformis*, *Pt* = *Pinus teocote*; *** = $Pr|t| < 0.01$, sin *Pinus lumholtzii*.

Santiago-García *et al.* (2015), aclaran que el crecimiento de diámetro está relacionado con la competencia entre árboles, y por lo tanto, los modelos dinámicos que predicen el crecimiento diamétrico pueden proporcionar información sobre la dinámica a partir de la edad y las condiciones iniciales del sitio, para respaldar estrategias de manejo forestal, y es aquí donde el modelo desarrollado en este trabajo encaja perfectamente.

Desde la creación del método GADA, se han realizado numerosas aplicaciones de este método en todo el mundo, con estudios de diámetro, altura, volumen, etc. de las más diversas especies forestales. Por ejemplo, Quiñónez-Barraza *et al.* (2015), evaluaron el crecimiento del diámetro normal para *Pinus* en Durango, encontrando que el modelo GADA de la función Chapman-Richards fue el mejor estimado para el crecimiento de *Pinus lumholtzii*, y el modelo basado en

Verhulst-Logistics estimó mejor el crecimiento de *Pinus ayacahuite*, donde se evaluaron modelos con R^2 superiores a 90%, pero los parámetros no fueron todos significativos ($p\text{-valor} > 0.01$). En el presente estudio se encontró un R^2 de 83% en promedio, donde todos los parámetros estimados del modelo desarrollado resultaron ser significativos a 1% ($Pr|t| < 0.01$). Otros estudios también obtuvieron evaluaciones no significativas, a 1%, de los parámetros del modelo, como Vargas-Larreta *et al.* (2013) que trabajaron con altura dominante e índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* en el noroeste de México, y Sghaier *et al.* (2015) cuando desarrollaron modelos para la población de *Thuya (Tetraclinis articulata (Vahl) Mast)* en Tunez.

Por otro lado, Sharma *et al.* (2017) realizaron un modelado a nivel individual del crecimiento de los árboles en la República Checa con el mismo método, donde el modelo desarrollado a partir de la ecuación basada en Chapman-Richards fue el que mejor se adaptó a los datos. Ercanli *et al.* (2014) trabajaron con GADA para la altura dominante en parcelas mixtas de *Pinus sylvestris* L. utilizando como base las funciones de Bertalanffy-Richards, Hossfeld y Lundqvist-Korf, en las que el modelo más apropiado para esta especie fue el de Hossfeld. González-García *et al.* (2015), trabajaron con este mismo método para la altura dominante y el área basal, incluyendo factores ambientales, con eucaliptos en el noroeste de España usando los modelos Korf, Hossfeld y Bertalanffy-Richards, donde dichos modelos resultaron útiles. Otra aplicación GADA fue desarrollada por Kahrman *et al.* (2018), quienes trabajaron con modelos de índices de sitio para la altura con pino de Calabria en la región del Mediterráneo central de Turquía, donde los datos se obtuvieron de parcelas naturales, de edades iguales, encontrando que el modelo a partir de la ecuación base de Hossfeld proporcionó el mejor resultado.

Se puede observar que en la mayoría de las aplicaciones GADA, los mejores modelos evaluados son los de la función base de Chapman-Richards y Hossfeld, donde ambos contienen tres parámetros en el modelo final; en cambio, el modelo propuesto en el presente desarrollo tiene solo dos parámetros, lo cual se convierte en una ventaja, ya que la aplicación de modelos con menos parámetros es más simple y es también una ventaja respecto a una mejor estimación del AIC, cuya fórmula tiene en cuenta el número de parámetros del modelo utilizado en la aplicación.

Para todas las especies, las líneas que modelan el crecimiento son muy similares a los puntos de crecimientos observados, es decir, tienen asíntotas realistas de acuerdo con los patrones de crecimiento (Figura 3). Por ejemplo, el comportamiento de crecimiento de *Pinus teocote* (Figura 3A) con índices de 14, 21, 28 y 35 cm, a la edad de referencia de 50 años, funciona de la misma forma para las otras especies, pero con diferentes índices del sitio. Se observa un resultado similar en el trabajo de Pyo (2017), donde se ajustó una ecuación dinámica del modelo de Chapman-Richards a *Pinus densiflora* (altura-Edad) en la región central de Corea, con índices de sitio de 8, 10, 12 m, con una edad de referencia de 30 años. Estos índices de sitio se refieren a familias de curvas que son simultáneamente polimórficas con múltiples asíntotas (Cieszewski, 2002; Castedo-Dorado *et al.*, 2007), es decir, representan los niveles de capacidad productiva de las parcelas de estudio, que en este trabajo están bien ajustadas, pues presentan asíntotas horizontales y comportamiento lógico, es decir, son consistentes con la realidad de que en un dado período de tiempo el crecimiento del diámetro del árbol se estabiliza, en la edad cero el diámetro proyectado de ambos índices es cero y en la edad de referencia, en este caso 50 años, los diámetros son iguales a los índices respectivos. Además, sus proyecciones presentan curvas polimórficas con diferentes asíntotas, es decir, tasas de crecimiento y crecimientos finales variables (Figura 3).

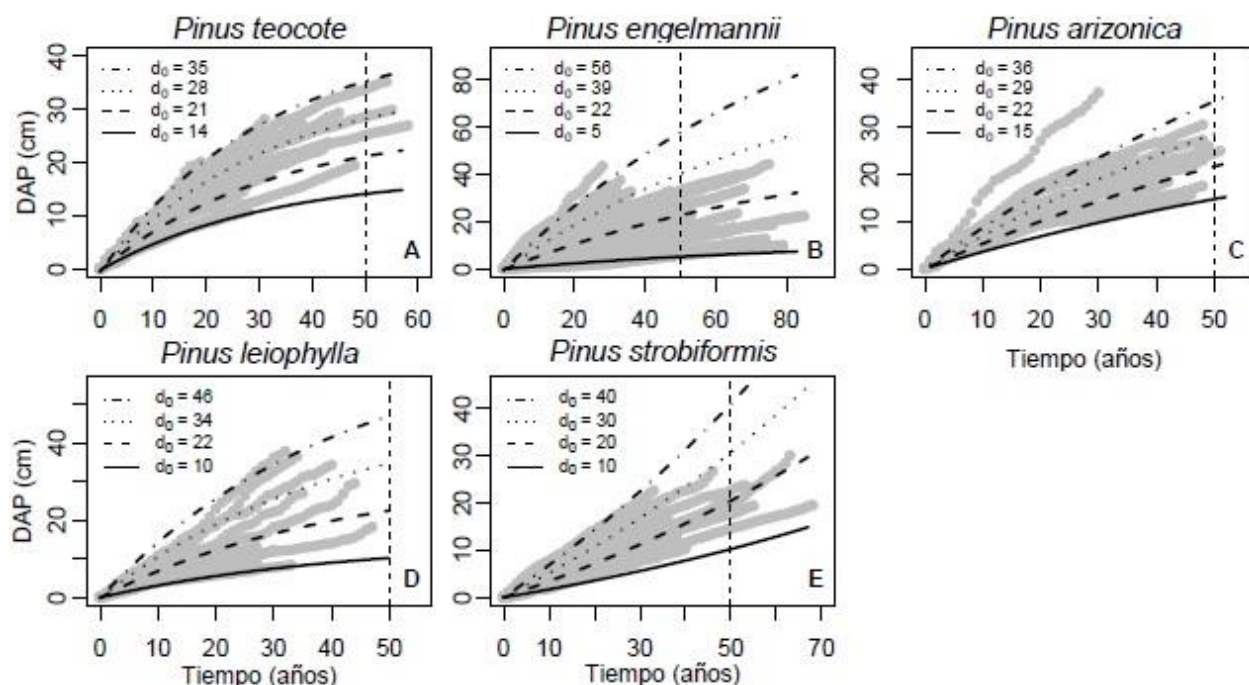


Figura 3. Gráficas del modelo dinámico GADA (Ecuación 3) con los respectivos índices de sitio (d_0) para 50 años a partir del modelado del diámetro en relación al tiempo para cada especie de pino.

Las estimaciones precisas de los índices de sitio (Figura 3) son una gran ventaja de los modelos dinámicos GADA ajustados en este trabajo, pues son básicamente predicciones, con buen ajuste, de los niveles de crecimiento que pueden esperarse que logre una especie determinada hasta la edad-base (que en este estudio se adoptó como 50 años). Sin embargo, el valor estimado del parámetro θ_3 del modelo GADA (Cuadro 2) para *P. strobiformis* fue negativo y por lo tanto su curva de crecimiento modelada se presenta en forma exponencial (Figura 3E), pues una parte de los árboles observados de esta especie, tiene todavía una alta tasa de crecimiento en diámetro y el modelo es sensible a este fenómeno.

Es importante señalar que la metodología GADA también puede aplicarse a evaluaciones de otras especies arbóreas, como por ejemplo en los trabajos desarrollados por Gea-Izquierdo *et al.* (2008) y Díaz-Maroto *et al.* (2010) quienes evaluaron modelos iniciales con tres parámetros para *Quercus*, y González-García *et al.* (2016) para *Eucalyptus*, todos ellos con resultados satisfactorios. Por lo anterior, se afirma que la metodología aquí desarrollada, con un menor número de parámetros en comparación con los trabajos citados, es de más fácil aplicación y también puede ampliarse a otras especies y obtener resultados satisfactorios.

CONCLUSIONES

La aplicación de la metodología GADA al modelo de Weibull presentó un ajuste satisfactorio; las estadísticas de comparación (MAPE, AIC, R^2 adj, RMSE) fueron mejores en relación con los modelos base y fue posible obtener diferentes índices de sitios bien ajustados para todas las especies, incluso para las especies con crecimiento muy variable (desviación estándar grande). Es decir, el sistema dinámico de crecimiento obtenido con el modelo propuesto, es una herramienta confiable y más económica que las hasta ahora existentes para el modelado del potencial

productivo de las especies de *Pinus*, pues se requieren menos parámetros y por lo tanto se reducen los tiempos y costos del muestreo en campo. De esta manera, esta nueva aplicación permite aumentar la eficiencia y facilitar el estudio del desarrollo dimensional de las especies, teniendo aplicaciones de planificación y gestión, lo cual es valioso para los procesos de toma de decisiones.

LITERATURA CITADA

- Akaike, H. 1974. Stochastic theory of minimal realization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 19(6): 667-674.
- Bailey, R. L. & J. L. Clutter. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science* 20(2): 155-159.
- Bravo-Oviedo, A., S. Roig, F. Bravo, G. Montero & M. del-Río. 2011. Environmental variability and its relationship to site index in Mediterranean Maritime Pine. *Forest Systems* 20(1): 50-64.
- Castedo-Dorado, F., U. Diéguez-Aranda, M. Barrio-Anta & J. G. Álvarez-González. 2007. Modelling stand basal area growth for radiata pine plantations in Northwestern Spain using the GADA. *Annals of Forest Science*, 64(6): 609–619.
- Cavanaugh, J. E. 1997. Unifying the derivations for the Akaike and corrected Akaike information criteria. *Statistics & Probability Letters* 33(2): 201-208.
- Cieszewski, C. J. & R. L. Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science* 46(1): 116-126.
- Cieszewski, C. J. 2001. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Canadian Journal of Forest Research* 31(1): 165-173.
- Cieszewski, C. J. 2002. Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *Forest Science*, 48(1): 7–23.
- CONAFOR (Comisión Nacional Forestal). 2012. Programa nacional de dendroenergía forestal 2007-2012; consultado en: <http://www.conafor.gob.mx:8080/documentos/docs/4/1585Programa%20Nacional%20Dendroenergia.pdf>. México DF. 12 p.
- Del Río, M., H. Pretzsch, I. Alberdi, K. Bielak, F. Bravo, A. Brunner & A. Bravo-Oviedo. 2016. Characterization of the structure, dynamics, and productivity of mixed-species stands: review and perspectives. *European Journal of Forest Research* 135(1): 23-49.
- Development Core Team. 2017. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. Available online: <http://www.R-project.org/> (accessed on 25 March 2019).
- Díaz-Maroto, I. J., J. Fernández-Parajes, P. Vila-Lameiro, E. Barcala-Pérez. 2010. Site index model for natural stands of rebollo oak (*Quercus pyrenaica* Willd.) in Galicia, nw Iberian Peninsula. *Ciência Florestal*, 20(1): 57–68.
- Duan, G., Z. Gao, Q. Wang & L. Fu. 2018. Comparison of different height–diameter modelling techniques for prediction of site productivity in natural uneven-aged pure stands. *Forests* 9(2): 63-87.
- Ercanli, İ., A. Kahriman, & H. Yavuz. 2014. Dynamic base-age invariant site index models based on generalized algebraic difference approach for mixed Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) stands. *Turkish Journal of Agriculture and Forestry*, 38(1): 134–147.

- García, O. 1994. The state-space approach in growth modelling. *Canadian Journal of Forest Research* 24(9): 1894-1903.
- Gea-Izquierdo, G., I. Cañellas & G. Montero 2008. Site index in agroforestry systems: Age-dependent and age-independent dynamic diameter growth models for *Quercus ilex* in Iberian open oak woodlands. *Canadian Journal of Forest Research*, 38(1): 101–113.
- González-García, M., A. C. Almeida, A. Hevia, J. Majada & C. Beadle. 2016. Application of a process-based model for predicting the productivity of *Eucalyptus nitens* bioenergy plantations in Spain. *GCB Bioenergy*, 8(1): 194–210.
- González-García, M., A. Hevia, J. Majada, R. Calvo de Anta & M. Barrio-Anta. 2015. Dynamic growth and yield model including environmental factors for *Eucalyptus nitens* (Deane & maiden) Maiden short rotation woody crops in Northwest Spain. *New Forests* 46(3): 387-407.
- Hall, D. B. & R. L. Bailey. 2001. Modeling and prediction of forest growth variables based on multilevel nonlinear mixed models. *Forest Science* 47(3): 311-321.
- Kahriman, A., T. Sönmez & K. Gadow. 2018. Site index models for Calabrian pine in the central Mediterranean region of Turkey. *Journal of Sustainable Forestry* 37(5): 459-474.
- Myttenaere, A., B. Golden, B. Le Grand & F. Rossi. 2016. Mean absolute percentage error for regression models. *Neurocomputing* 192: 38-48.
- Nunes, L., M. Patrício, J. Tomé & M. Tomé. 2011. Modeling dominant height growth of maritime pine in Portugal using GADA methodology with parameters depending on soil and climate variables. *Annals of Forest Science*, 68(2): 311–323.
- Panik, M. J. 2014. Growth curve modeling: theory and applications. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc: 437.
- Pyo, J. 2017. Developing the site index equation using a generalized algebraic difference approach for *Pinus densiflora* in central region, Korea. *Forest Science and Technology* 13(2): 87-91.
- Quiñonez-Barraza, G., H. M. De los Santos Posadas & J. G. Álvarez González. 2015. Crecimiento en diámetro normal para *Pinus* en Durango. *Revista mexicana de ciencias forestales*, 6(29), 108–125.
- Santiago-García, W., E. Pérez-López, G. Quiñonez-Barraza, G. Rodríguez-Ortiz, E. Santiago-García, F. Ruiz-Aquino & J. C. Tamarit-Urias. 2017. A dynamic system of growth and yield equations for *Pinus patula*. *Forests* 8(12): 465-489.
- Santiago-García, W., H. M. De los Santos-Posadas, G. Ángeles-Pérez, J. R. Valdez-Lazalde, J. J. Corral-Rivas, G. Rodríguez-Ortiz & E. Santiago-García. 2015. Modelos de crecimiento y rendimiento de totalidad del rodal para *Pinus patula*. *Madera y bosques*, 21(3): 95-110.
- Sghaier, T., M. Sánchez-González, S. Garchi, Y. Ammari, I. Cañellas, & R. Calama. 2015. Developing a stand-based growth and yield model for Thuya (*Tetraclinis articulata (vahl) mast*) in Tunisia. *IForest - Biogeosciences and Forestry*, 9(1): 79.
- Sharma, R. P., Z. Vacek, S. Vacek, V. Jansa & M. Kučera. 2017. Modelling individual tree diameter growth for Norway spruce in the Czech Republic using a generalized algebraic difference approach. *Journal of Forest Science*, 63(5): 227–238.
- Vanclay, Jerome K. 1994. Modelling forest growth and yield: applications to mixed tropical forests. *School of Environment, Science and Engineering Papers*: 537.
- Vargas-Larreta, B., O. A. Aguirre-Calderón, J. J. Corral-Rivas, F. Crecente-Campo & U. Diéguez-Aranda. 2013. Modelo de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el noreste de México. *Agrociencia*, 47(1): 91-106.